

$$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$B' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$$

$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \quad E' = \begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix}$$

$$E' = {}^T A E \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = a_{11} \bar{e}_1 + \dots + a_{n1} \bar{e}_n \\ \vdots \\ \bar{e}_n' = a_{1n} \bar{e}_1 + \dots + a_{nn} \bar{e}_n \end{cases}$$

$$\bar{v} = {}^T E X = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = {}^T E' X'$$

$${}^T E X = {}^T E' X' = {}^T ({}^T A E) X = {}^T E (A X)$$

$$\bar{X} = A X'$$

$$\exists \hat{A} \in K^{n \times n} : X' = \hat{A} X$$

$$\Rightarrow X = A X' = A \hat{A} X \quad \forall X \in K^{n \times 1}$$

$$\Rightarrow A \hat{A} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{A} = A^{-1}$$

oss: le matrici di cambiamento di base sono invertibili

Siano V, W due vettoriali su K e $f: V \rightarrow W$.

e rappresentiamo f in base

$$B_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$B_W = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$$

$$B_V' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$$

$$B_W' = (\bar{g}_1' \dots \bar{g}_m').$$

base di V

base di W .

$$X = AX'$$

ove X = coord. vettore a $\mathcal{B}_V$ di un vett. $\vec{v}$
e X' coord. vettore a $\mathcal{B}_W$
del vettore $\vec{v}$.

$$y = Mx$$

M matrice della funzione lineare

$$f: V \rightarrow W$$

vettore a $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.

$$y' = M'x'$$

$$y = Cy'$$

y = coord. vettore a $\mathcal{B}_W$ di $\vec{w} \in W$
 y' coordinate vett. a $\mathcal{B}_W$ di $\vec{w}$.

$$y = AX$$

$$X' = BX \Rightarrow X = \underbrace{B^{-1}}_{\text{multiplied by } B} X'$$

$$y' = By$$

$$y = AB^{-1}X'$$

$$y' = By = B(AB^{-1})X'$$

$$\underbrace{BAB^{-1}}_{= A'} = A'$$

multiplied by B'

Sia M una matrice con colonne linearmente indipendenti:

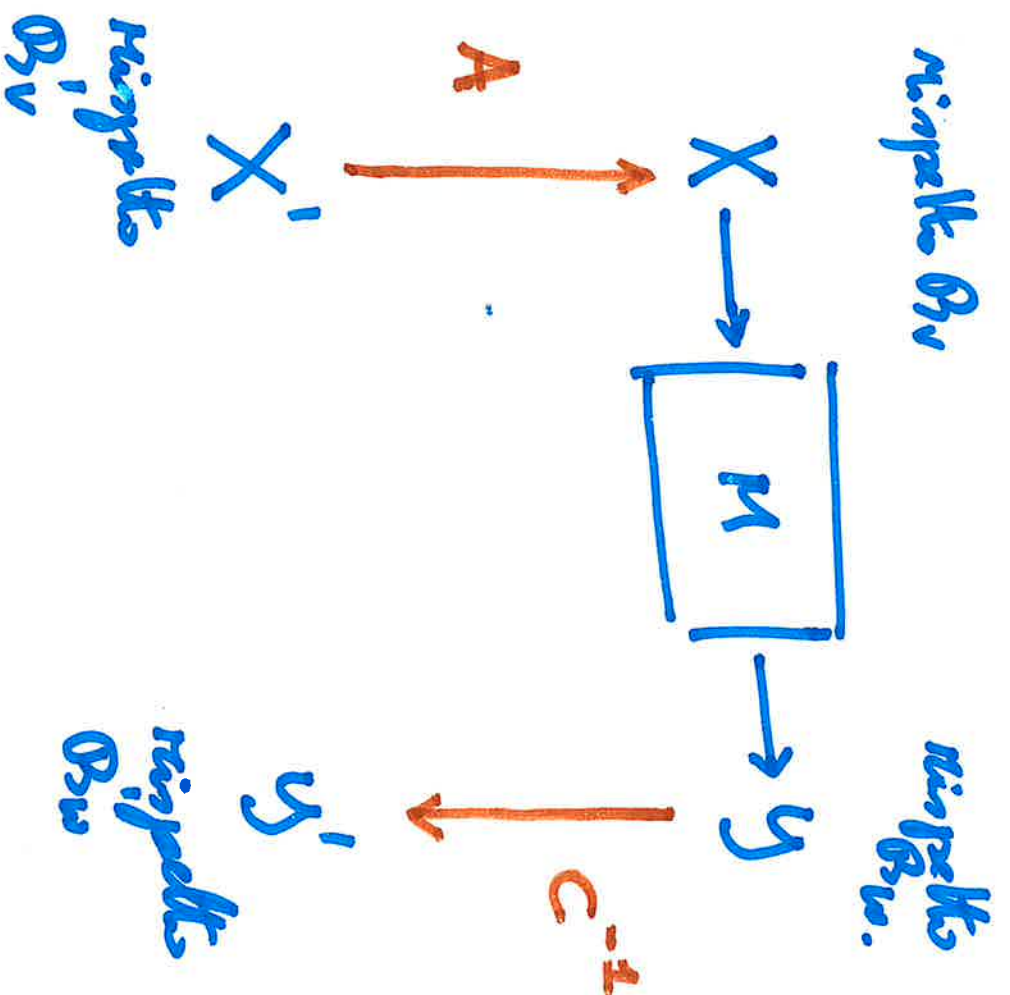
$$d \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\exists m_{ji} \neq 0} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} = -d \begin{bmatrix} m_{ji} & m_{j2} & \dots & m_{jn} \\ m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

m_{ji}

ad ogni colonna $j > 1$ in M' sottraggio la prima moltiplicata per m_{j1}/m_{11}

$$d \begin{bmatrix} m'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m'_{n1} & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m''_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & m''_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m''_{n1} & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$



$$M' = C^{-1} M A$$

Scepiammo ora $f: V \rightarrow V$ endomorfismo.

e siano $B_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
 $B_V' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$.

$f(X) = AX$ A matrice di f rispetto B_V

matrice di cambiamento di base

$$X' = BX \quad X = B^{-1}X'$$

$$\boxed{A' = B A B^{-1}}$$

$$A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$\uparrow$
matrice di f rispetto B_V'

Def: Due matrici A, A' sono dette conjugate se $\exists B$ invertibile

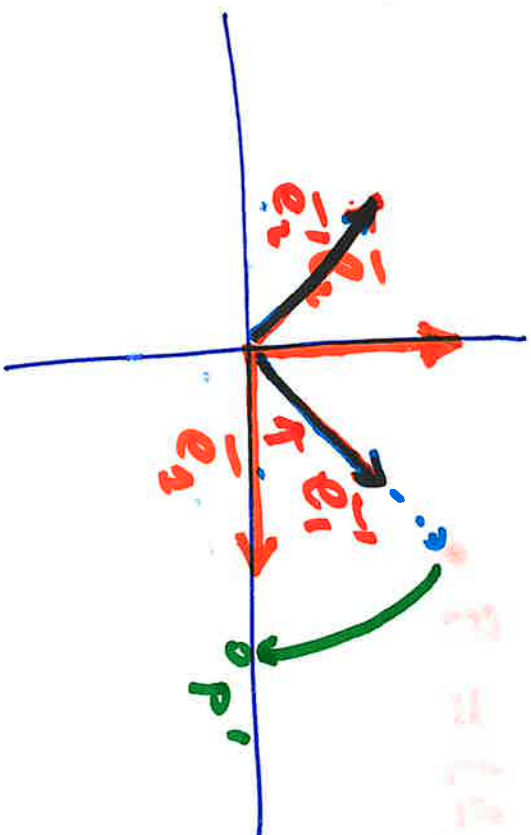
tale che

$$A' = B A B^{-1}$$

(oppure

$$A' B = B A).$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ lungo } \alpha \text{ a } \alpha'$$



$$\bar{e}_2 = (1, 0)$$

$$\bar{e}_1 = (0, 1)$$

$$\bar{e}_2' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\bar{e}_1' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

25: la relazione di similitudine fra matrici $\in \mathbb{K}^{n \times n}$ è di equivalenza.

oss: Sia $A \in K^{n,n}$. Indichiamo con $GL(n, K)$ il gruppo della matrice di $K^{n,n}$ invertibili.

$$I \in GL(n, K)$$

$$A \in GL(n, K) \Rightarrow A^{-1} \in GL(n, K).$$

oss: Una matrice invertibile M corrisponde ad una trasformazione lineare invertibile $\Rightarrow$

$$\text{in particolare } \ker(M) := \{X \in K^n, MX = 0\} = \{0\}.$$

Quindi se M è invertibile $\Rightarrow$ manda i vettori

liberi in vettori liberi $\Rightarrow$ manda una base di K^n

in una base di $K^n \Rightarrow M^{-1}$ è matrice di cambiamento di base.

Invertibile $\Leftrightarrow$ le colonne di M sono libere.

Vogliamo una funzione

$$d: K^{n,n} \rightarrow K$$

tale che 1) $d(M) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di M sono legate.

2) d è la più semplice possibile da calcolare.

Proprietà che vogliamo

1) $d(I) = 1$

2) Se in M c'è una colonna di zeri $\Rightarrow d(M) = 0$

3) Se ad una colonna di M sommiamo una c. lineare
della rimanenti $\Rightarrow d(M) = d(M')$.

(2) + (3) $\Rightarrow$ Se la colonna di M non è legata $\Rightarrow d(M) = 0$

4) La funzione d è lineare nella colonna di M .

Se $M = (c_1 \dots c_i \dots c_n)$ e D è un vettore
colonne

$$\Rightarrow d(c_1 \dots c_i + \beta D \dots c_n) = \alpha d(c_1 \dots c_i \dots c_n) + \beta d(c_1 \dots D \dots c_n) \quad \forall i.$$

oss: Se si scambiavo 2 colonne di $M \Rightarrow d(M) = -d(M')$.

$$\begin{aligned} d(c_1 c_2 \dots c_n) &= d(c_1 c_2 + c_1 \dots c_n) = \\ &= d(-c_2 c_2 + c_1 \dots c_n) = d(-c_1 c_1 \dots c_n) = \\ &= -d(c_1 c_1 \dots c_n). \end{aligned}$$

osserviamo che se M contiene una riga di zeri $\Rightarrow d(M) = 0$
perché in quel caso $\text{Ker}(M) \neq \{0\}$. in quanto $\text{Im}(M) \subsetneq V$.
 $\Rightarrow$ le colonne di M non formano base di $V \Rightarrow d(M) = 0$

$$\begin{aligned}
&= \pm d \begin{bmatrix} m_{11}''' & & & \\ & m_{22}''' & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn}''' \end{bmatrix} = \pm m_{11}''' d \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & m_{22}''' & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn}''' \end{bmatrix} = \\
&= \dots = \pm m_{11}''' m_{22}''' \dots m_{nn}''' d \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&= \pm m_{11}''' \dots m_{nn}'''
\end{aligned}$$

La funzione

$$\det(M) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+i} \det(M_{ij}) m_{ij}$$

gode delle prop. 1-4.

$$\text{con } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\Rightarrow$ è la stessa.

Una matrice $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile $\Leftrightarrow$

$$\det(M) \neq 0$$

det si può calcolare o con il metodo di Gauss
o con la formula di Laplace o ...

perché la funzione soddisfa le proprietà 1-4
dalla definizione è unico!

Teorema: $\det(A) = \det(A^T)$ $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n}$

CALCOLO MATRICE INVERSA:

1) algoritmo di Gauss. $L(A)$

TRASFORMARE LA MATRICE DATA IN UNA
COPIA DELLA MATRICE IDENTICA

APPLICANDO OPERAZIONI ELEMENTARI ALLE
COLONNE DI A E CONTEMPORANEAMENTE AD UNA
COPIA DI I .

- OPERAZIONI ELEMENTARI
 - SCAMBIO DI COLONNE
 - PRODOTTO DI UNA COLONNA PER UNO SCALARE $\neq 0$
 - SOMMA DI UNA COLONNA AD UN'ALTRA

ALLA FINE LA VERSIONE "TRASFORMATA" DI I
CORRISPONDE ALLA MATRICE CHE MOLTIPLICATA PER A

DÀ LA MATRICE INVERSA $\Rightarrow A^{-1}$

2) II Teorema di Laplace.

Sia $A \in K^{n,n} \Rightarrow$

$$(*) \sum_{i=1}^n a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\prod_{ik}} \det(A_{ik}) = \begin{cases} \det(A) & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

DM: Se $k=j$ si verifica che valgono le prop. di det $\Rightarrow$ è proprio $\det(A)$.

Se $k \neq j$ ricorriamo (*) come det di una matrice

A' in cui 2 colonne uguali.

$$\Rightarrow \det(A') = 0.$$

□

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$j=1, k=3$$

$$a_{11}(-1)^2 \det(A_{13}) + a_{21}(-1)^3 \det(A_{23}) + a_{31}(-1)^4 \det(A_{33})$$

$$= 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^4 =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Theorem: $\text{sis } A \in K^{n,n} \quad \det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^T A_a$$

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

$$\text{ove } A_a = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \dots & \Gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_n & \dots & \Gamma_n \end{bmatrix}$$

DLM

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \dots & \Gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_n & \dots & \Gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = [a_{i1} \dots a_{in}] \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \Gamma_k = \begin{matrix} a_{ij} \\ \text{det } A \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} A_a = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{If } \det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_a$$

$$f: V \rightarrow V$$

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$f(x) = AX$$

La base canonica viene moltiplicata nella base che ha come componenti le colonne di A

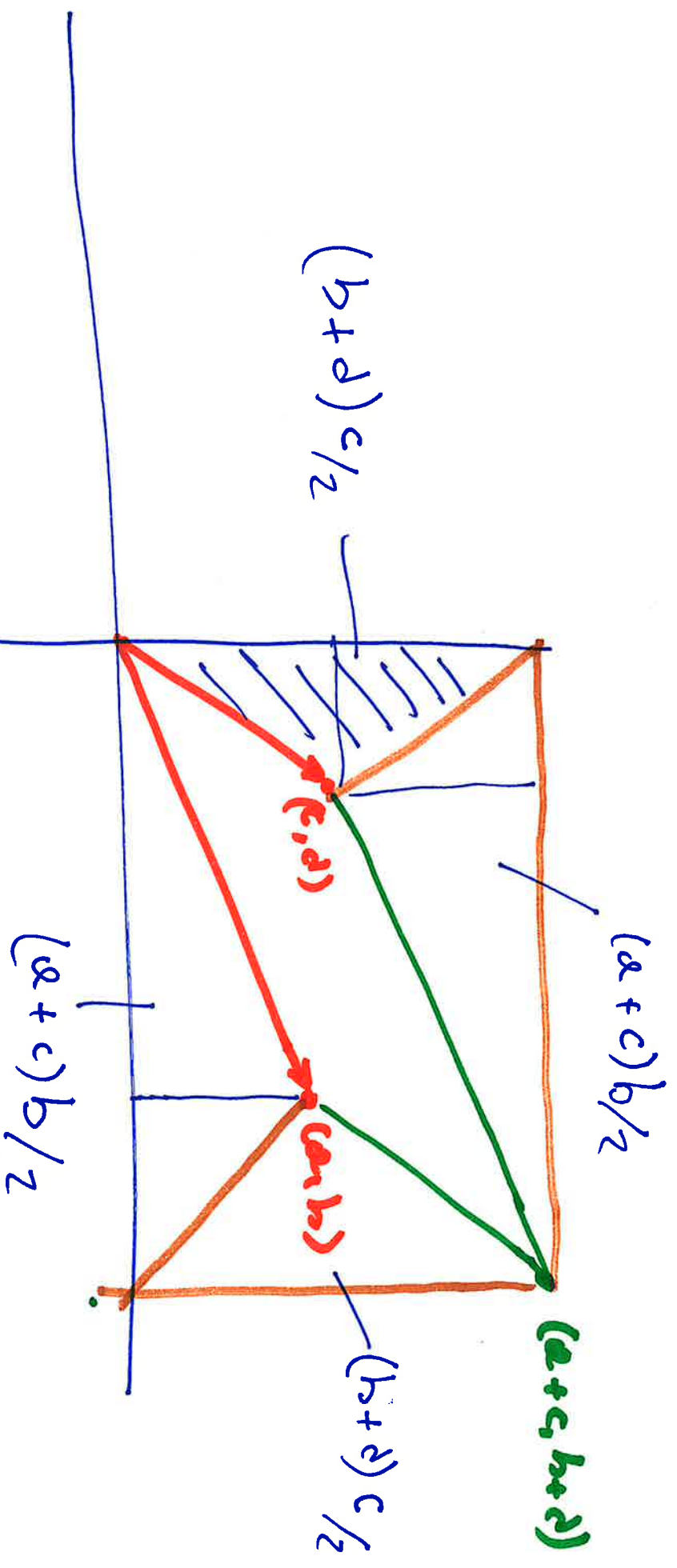
Il "volume" descritto dalla nuova base è $\det(A)$.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x, y)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$



$$(a+c)(b+d) - (b+d)c$$

$$- (a+c)b =$$

$$= \cancel{ab} + \cancel{ad} + \cancel{cb} + \cancel{cd} - \cancel{bc} - \cancel{dc}$$

$$= \cancel{ab} - \cancel{cb}$$

$$= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$